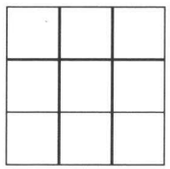
43 Quadrados latinos

Há alguns anos, o Sudoku vem seduzindo as pessoas. Por todos os lugares, canetas e lápis são mordidos à espera da inspiração certa para o número a ser posto naquele boxe. Será um 4 ou um 5? Talvez seja 9. Cidadãos a caminho do trabalho saem de seus trens pela manhã tendo feito mais esforço mental do que farão no resto do dia. À noite, o jantar está no forno. É 5, 4, ou seria 7? Todos estão lidando com quadrados latinos – estão sendo matemáticos.

	4		8		3			
		7						3
		9	7			2	6	
3				1		7		9
			6	9	8			
1		5		2				6
	2	3			6	5		
6						1		
			5		2		8	

Sudoku desvendado No Sudoku, recebemos uma grade 9 × 9 com alguns números preenchidos. O objetivo é preencher o resto usando os números dados como dicas. Cada linha e cada coluna deve conter apenas uma vez os algarismos 1, 2, 3..., 9, do mesmo modo que os pequenos quadrados 3 × 3 que o constituem.



Acredita-se que o Sudoku (que significa "algarismos únicos") foi inventado no fim dos anos 1970. Ganhou popularidade no Japão nos anos 1980, antes de arrebatar a popularidade de massa em 2005. A atração do quebra-cabeça é que, ao contrário de palavras cruzadas, você não precisa ter lido muito para tentá-lo, mas, assim como as palavras cruzadas, ele pode ser instigante. Os viciados nas duas formas de autotortura têm muito em comum.

Quadrados latinos 3 × 3 Uma série quadrada contendo exatamente um símbolo em cada linha e cada coluna é chamada de quadrado latino. O número de símbolos é igual ao tamanho do quadrado, e é chamado de "ordem". Podemos preencher uma grade 3 × 3 em branco, de modo que cada linha e cada coluna contenha exatamente um dos símbolos *a*, *b* e *c*? Se pudermos, isso seria um quadrado latino de ordem 3.

linha do tempo

1779 d.C.
Euler explora a teoria dos quadrados latinos

1900
Tarry mostra que não há quadrados latinos ortogonais de ordem 6

1925
Fisher sugere o uso de quadrados latinos para projetar experiências estatísticas

Ao introduzir o conceito de quadrado latino, Leonhard Euler chamou-o de um "novo tipo de quadrado mágico". Ao contrário dos quadrados mágicos, no entanto, os quadrados latinos não estão preocupados com aritmética, e os símbolos não têm de ser números. O motivo para esse nome é simplesmente que os símbolos usados para os formar são tirados do alfabeto latino, enquanto Euler usou o grego, com outros quadrados.

Um quadrado latino 3 × 3 pode ser facilmente anotado.

Se pensamos em *a*, *b* e *c* como dias da semana, segunda-feira, quarta-feira e sexta-feira, o quadrado poderia ser usado para agendar reuniões entre duas equipes de pessoal. A Equipe Um é formada por **L**arry, **M**ary e **N**ancy, e a Equipe Dois por **R**oss, **S**ophie e **T**om.

	R	**S**	**T**
L	*a*	*b*	*c*
M	*b*	*c*	*a*
N	*c*	*a*	*b*

Por exemplo, **M**ary, da Equipe Um, tem uma reunião com **T**om, da Equipe Dois na segunda-feira (a intersecção da linha **M** com a coluna **T** é a – segunda-feira). A disposição do quadrado latino garante que uma reunião aconteça entre cada par de membros da equipe e que não haja coincidência de datas.

Esse não é o único quadrado latino 3 × 3 possível. Se interpretarmos *A*, *B* e *C* como temas discutidos nas reuniões entre Equipe Um e Equipe Dois, podemos produzir um quadrado latino que garante que cada pessoa discuta um tema diferente com um membro da outra equipe.

Então **M**ary da Equipe Um discute o tema *C* com **R**oss, o tema *A* com **S**ophie e o tópico *B* com **T**om.

	R	**S**	**T**
L	*A*	*B*	*C*
M	*B*	*C*	*A*
N	*C*	*A*	*B*

Mas quando aconteceriam essas discussões, entre quem e sobre que tema? Qual seria o esquema para essa complexa organização? Por sorte, os dois

1960
A conjectura de Euler a respeito da não existência de determinados pares de quadrados latinos é refutada por Bose, Parker e Shrikhande

1979
Jogos como o Sudoku são inventados em Nova York

quadrados latinos podem ser combinados, símbolo a símbolo, para produzir um quadrado latino composto, no qual cada um dos nove pares possíveis de dias e de tópicos ocorram em exatamente uma posição.

	R	S	T
L	*a*, A	*b*, B	*c*, C
M	*b*, B	*c*, C	*a*, A
N	*c*, C	*a*, A	*b*, B

Outra interpretação para o quadrado é o histórico problema dos "nove oficiais", no qual nove oficiais pertencentes a três regimentos *a*, *b* e *c* e a três postos A, *B* e C são postos no pátio de parada, de modo que cada linha e coluna contenha um oficial de cada regimento e de cada posto. Quadrados latinos que se combinam desse jeito são chamados de "ortogonais". O caso 3 × 3 é direto, mas encontrar pares de quadrados latinos ortogonais para alguns quadrados maiores não é nada fácil. Isso foi uma coisa que Euler descobriu.

No caso do quadrado latino 4 × 4, um "problema dos 16 oficiais" seria arrumar as 16 figuras de baralho em um quadrado de modo tal que haja um posto (Ás, Rei, Rainha ou Valete) e um naipe (espadas, paus, copas ou ouros) em cada linha e coluna. Em 1782, Euler propôs o mesmo problema para "36 oficiais". Em essência, ele estava procurando dois quadrados ortogonais de ordem 6. Não conseguiu encontrá-los e conjecturou que não havia pares de quadrados latinos ortogonais de ordens 6, 10, 14, 18, 22, ... Será que isso poderia ser provado?

Então apareceu Gaston Tarry, um matemático amador que trabalhara como funcionário público na Argélia. Ele examinou exemplos e, por volta de 1900, havia verificado a conjectura de Euler em um caso: não há par de quadrados latinos ortogonais de ordem 6. Os matemáticos naturalmente supuseram que Euler estava correto nos outros casos, 10, 14, 18, 22...

Em 1960, os esforços combinados de três matemáticos assombraram o mundo matemático, provando que Euler estava errado em todos os outros casos. Raj Bose, Ernest Parker e Sharadchandra Shrikhande provavam que havia, mesmo, pares de quadrados latinos ortogonais de ordem 10, 14, 18, 22... O único caso em que quadrados latinos não existem (fora os triviais de ordem 1 e 2) é o de ordem 6.

Vimos que há dois quadrados latinos mutuamente ortogonais de ordem 3. Para a ordem 4, podemos produzir três quadrados que são mutuamente ortogonais, um em relação ao outro. Pode ser mostrado que nunca há mais do que $n - 1$ quadrados latinos mutuamente ortogonais de ordem n, então para $n = 10$, por exemplo, não poderá haver mais de nove quadrados latinos mutuamente ortogonais. Mas encontrá-los é uma outra história. Até agora ninguém conseguiu sequer produzir três quadrados latinos de ordem 10 que sejam mutuamente ortogonais.

Os quadrados latinos são úteis? R.A. Fisher, um eminente estatístico, viu o uso prático para o quadrado latino. Ele os usou para revolucionar métodos agrícolas durante sua época na Estação de Pesquisa de Rothamsted, em Hertfordshire, no Reino Unido.

O objetivo de Fisher era investigar a eficácia de fertilizantes no rendimento de um cultivar. Idealmente, o que se quer é plantar cultivares em condições de solo idênticas, de maneira que a qualidade do solo não seja um fator indesejável que influencie o rendimento do cultivar. Poderíamos então aplicar os diferentes fertilizantes, certos do conhecimento de que a "amolação" da qualidade do solo foi eliminada. O único jeito de garantir condições de solo idênticas seria usar o mesmo solo – mas não é prático ficar cavando e replantando cultivares. Mesmo se isso fosse possível, condições meteorológicas poderiam se tornar um novo estorvo.

Um modo de contornar isso é usar quadrados latinos. Vamos examinar o teste de quatro tratamentos. Se marcamos um campo quadrado em 16 lotes, podemos imaginar o quadrado latino como uma descrição do campo em que a qualidade do solo varia "verticalmente" e "horizontalmente".

Os quatro fertilizantes são então aplicados aleatoriamente no esquema marcado como *a*, *b*, *c* e *d*, de modo que exatamente um é aplicado em cada linha e coluna em uma tentativa de eliminar a variação de qualidade do solo. Se suspeitamos que algum outro fator pode influenciar o rendimento do cultivar, podemos lidar com isso também. Suponhamos que achamos que a hora do dia em que o fertilizante é aplicado é um fator. Marque quatro zonas de horas durante o dia como *A*, *B*, *C* e *D* e use quadrados latinos ortogonais como o projeto para um esquema para reunir dados. Isso garante que cada tratamento e zona horária é aplicado em um dos lotes. O projeto para a experiência seria:

a, hora A	b, hora B	c, hora C	d, hora D
b, hora C	a, hora d	d, hora A	c, hora B
c, hora D	d, hora C	a, hora B	b, hora A
d, hora B	c, hora A	b, hora D	a, hora C

Outros fatores podem ser separados indo adiante e criando projetos de quadrados latinos cada vez mais elaborados. Euler não podia sonhar que a solução do problema dos seus oficiais fosse ser aplicada em experiências agrícolas.

A ideia condensada: sudoku revelado